ENS LYON . (S.N)

COMPOSITION DE MATHEMATIQUES

(Durée : 3 heures)

L'épreuve est constituée d'un problème qui comporte quatre parties. Les parties A, B et C sont indépendantes ; la partie D utilise des résultats de la partie A.

On considère la famille des fonctions $f_{\alpha,\beta}$ qui dépendent de deux paramètres réels α et β et qui sont définies sur $\mathbb{R}^+$ par :

$$f_{\alpha,\beta}(x) = \begin{cases} \dfrac{2}{(x^\alpha + 1).(x^\beta + 1)} & \text{si } x > 0 \\ \lambda_{\alpha,\beta} & \text{si } x = 0 \end{cases}$$

où $\lambda_{\alpha,\beta}$ est un réel choisi de façon à ce que $f_{\alpha,\beta}$ soit continue sur $\mathbb{R}^+$.

A 1 - Préciser, selon α et β, la valeur de $\lambda_{\alpha,\beta}$.

2 - Déterminer l'ensemble des couples (α, β) de $\mathbb{R}^2$ pour lesquels l'intégrale

$$I_{\alpha,\beta} = \int_0^{+\infty} f_{\alpha,\beta}(x).dx$$

est convergente ; donner une représentation graphique de cet ensemble.

3 - Si elles sont convergentes, calculer les intégrales : $I_{1,1}$, $I_{0,2}$, $I_{1,2}$.

4 - a) Préciser les couples (α, β) de réels pour lesquels $I_{\alpha,\beta}$, $I_{-\alpha,\beta}$ et $I_{0,\beta}$ convergent simultanément et montrer qu'alors : $I_{\alpha,\beta} + I_{-\alpha,\beta} = 2.I_{0,\beta}$.

b) Préciser les valeurs du réel α pour lesquelles $I_{\alpha,2}$ et $I_{-\alpha,2}$ convergent simultanément et montrer qu'alors : $I_{-\alpha,2} = I_{\alpha,2}$.

c) Déduire de a) et b) la valeur de $I_{\alpha,2}$, si cette intégrale converge.

Tournez la page S.V.P.

ENS LYON (S.N.)

B Dans cette partie, p est un entier tel que l'intégrale $I_{0,4p}$ converge ; on se propose de calculer la valeur de $I_{0,4p}$.

1 - Expliciter les solutions complexes de l'équation $x^{4p} + 1 = 0$; on notera ces solutions r_k $(0 \leq k \leq 4p - 1)$ de telle sorte que leurs arguments respectifs θ_k, choisis dans $[0, 2\pi[$, soient rangés par ordre croissant.

2 - a) Effectuer la division de $(x^{4p} + 1)$ par $(x - r_k)$ suivant les puissances décroissantes de x.

b) Montrer : $\dfrac{1}{x^{4p} + 1} = \dfrac{1}{4p} \displaystyle\sum_{k=0}^{4p-1} \dfrac{-r_k}{x - r_k}$.

3 - Exprimer, à l'aide des arguments θ_k, le développement en éléments simples sur $\mathbb{R}$ de la fraction $\dfrac{1}{x^{4p} + 1}$.

4 - Soit φ un réel appartenant à $]0, \dfrac{\pi}{2}[$. Calculer l'intégrale J_φ définie par :

$$J_\varphi = \int_0^{+\infty} \left(\frac{x.\cos\varphi + 1}{x^2 + 2x.\cos\varphi + 1} - \frac{x.\cos\varphi - 1}{x^2 - 2x.\cos\varphi + 1} \right) dx$$

5 - Montrer : $\displaystyle\sum_{k=0}^{p-1} \sin\left(\frac{\pi}{4p} + \frac{k\pi}{2p}\right) = \frac{1}{2\sin\left(\frac{\pi}{4p}\right)}$.

6 - Déduire des questions précédentes la valeur de $I_{0,4p}$.

C 1 - Résoudre sur $\mathbb{R}$ l'équation différentielle (E) suivante : $y'(x) + \dfrac{4x}{x^2 + 1} y(x) = 1$.

2 - Dessiner l'allure de la courbe représentative de la solution de (E) qui s'annule pour $x = 0$ (on étudiera le sens de variation et les éventuelles asymptotes ; l'étude des points d'inflexion n'est pas demandée).

3 - Sans utiliser le résultat obtenu dans la question 1, déterminer les suites $(a_n)_{n \geq 0}$ telles que la série entière $y(x) = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$ soit solution de (E). Préciser le rayon de convergence R de ces séries entières.

D Lorsque $I_{\alpha,\beta}$ est définie, on note $X_{\alpha,\beta}$ une variable aléatoire à valeurs dans $\mathbb{R}$ dont la fonction de densité $g_{\alpha,\beta}$ est définie par :

$$g_{\alpha,\beta}(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x \leq 0 \\ K_{\alpha,\beta}\, f_{\alpha,\beta}(x) & \text{si } x > 0 \end{cases},$$

où $K_{\alpha,\beta}$ est une constante appropriée.

Dans ce qui suit, E(X) et V(X) désignent respectivement l'espérance et la variance d'une variable aléatoire X.

1 - Donner les valeurs de $K_{1,1}$, $K_{0,2}$, $K_{2,2}$.

2 - Calculer, si elles existent, les valeurs de $E(X_{2,2})$ et $V(X_{2,2})$.

3 - Au moyen de l'inégalité de Bienaymé-Tchebychev, calculer un majorant de la probabilité de l'événement " $|X_{2,2} - E(X_{2,2})| \geq 2$ ".

4 - A l'aide de la fonction de répartition de $X_{2,2}$, vérifier le résultat de la question 3 (on pourra utiliser : $\text{Arctan}(2 + \frac{2}{\pi}) \approx 1{,}208$).

5 - Les variables $X_{1,1}$ et $X_{2,0}$ étant supposées indépendantes, calculer la probabilité de l'événement " $X_{1,1} < X_{2,0}$ ".